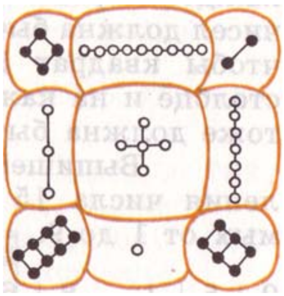
Магические квадраты



Существует такое предание, согласно которому китайский император Ию, живший примерно четыре тысячи лет назад, однажды увидел на берегу реки священную черепаху с узором из черных и белых кружков на панцире.

Сообразительный император сразу понял смысл этого рисунка. Чтобы и нам он стал понятен, заменим каждую фигуру числом, показывающим, сколько в ней кружков.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

При сложении чисел в любой строке и в любом столбце получается 15. Тот же результат получается и при сложении чисел по диагоналям: $4 + 5 + 6 = 15$, $8 + 5 + 2 = 15$.

Символ, изображенный на панцире священной черепахи, китайцы назвали «ло-шу» и считали магическим – он использовался при заклинаниях. Поэтому квадратные таблицы чисел, обладающие таким удивительным свойством, с тех пор называют *магическими квадратами*.

Как же составить магический квадрат, например, такой, как мы рассматривали выше? Можно попробовать перебрать различные варианты расстановки чисел от 1 до 9 в клетках таблицы. Если повезет – вы получите магический квадрат. Однако при этом надо иметь в виду, что всего существует почти 400 000 разных расстановок чисел в этом квадрате.

Гораздо интереснее составить такой магический квадрат с помощью рассуждений.

Сумма всех чисел от 1 до 9 равна 45. Всего в квадрате три строки. Значит, в каждой строке магического квадрата сумма чисел должна быть равна $45 : 3 = 15$. Но тогда, чтобы квадрат был магическим, в каждом столбце и на каждой диагонали сумма чисел тоже должна быть равна 15.

Выпишем все возможные представления числа 15 в виде суммы трех слагаемых от 1 до 9.

9 + 5 + 1	8 + 6 + 1	7 + 6 + 2	6 + 5 + 4
9 + 4 + 2	8 + 5 + 2	7 + 5 + 3	
	8 + 4 + 3		

Заметим, что число, стоящее в центре таблицы, должно встречаться в выписанных суммах четыре раза (столбец, строка и две диагонали). Каждое число, стоящее в углу таблицы, должно встречаться в суммах три раза (строка, столбец и диагональ). А число, стоящее на одном из оставшихся четырех мест, должно встречаться только два раза (строка и столбец).

Поскольку в полученных суммах четыре раза встречается только число 5, оно и должно стоять в центре таблицы.

Трижды встречаются в суммах числа 2, 4, 6, 8. Значит, они должны стоять в углах таблицы, причем так, чтобы 2 и 8 были на одной диагонали (8 + 5 + 2 = 15), а 4 и 6 – на другой. Продолжая рассуждения, можно построить магический квадрат, изображенный на рисунке.

Описанный способ дает несколько разных магических квадратов. Например, число 8 можно расположить в любом из четырех углов, что дает разные по виду квадраты.

А. Дюрер. Меланхолия. Гравюра на меди. 1514 г.

Магические квадраты почитались не только в Древнем Китае. Во времена средневековья в Европе свойства магических квадратов тоже считались волшебными. Магические квадраты служили талисманами, защищая тех, кто их носил, от разных бед. Знаменитый магический квадрат изображен на гравюре великого немецкого художника Альбрехта Дюрера «Меланхолия».

Интересно, что в нижней строке этого магического квадрата средние числа изображают год создания гравюры – 1514. Возможно, Дюрер знал этот квадрат, а может быть, начав именно с этих чисел, художник смог найти остальные методом подбора…

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Попробуй сам!

1. Составьте все 8 различных магических квадратов из чисел от 1 до 9.

2. Проверьте основные свойства магического квадрата Дюрера, просчитав суммы по строкам, столбцам и диагоналям. Исследуйте другие свойства этого квадрата, посчитав сумму чисел центрального квадрата и каждого из угловых квадратов.

3. Впишите в пустые клетки квадрата такие числа, чтобы квадрат стал магическим.

2		6
	5	
4		

18		14
	15	
16		12

	42	
		6
24	18	48

4. Восстановите магические квадраты.

3		15	14
13	16		
10	11		
8		12	9

		14	11
	15	8	10
16	2	9	
13	12		

15	10	9	12
16			19
	17	18	
	14	13	

8			11
19	5		16
	17	18	
			15

5. Возьмите квадрат 4 Х 4 и впишите в него числа от 1 до 16 по порядку. Теперь поменяйте местами числа, стоящие в противоположных углах квадрата. А затем поменяйте местами числа, стоящие в противоположных углах центрального квадрата. Если вы все сделали правильно, должен получиться магический квадрат. Проверьте.